19/3/19

Χαρακτηρισμοί ανοικτών και κλειστών συνόλων με χρήση σύγκλισης ακολουθιών

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος $G \subseteq X$
Τ.Α.Ε.Ι. (i) Το G είναι ανοικτό
(ii) Για κάθε $x \in G$ αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο (X,ρ) με $x_n \xrightarrow{\rho} x$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: $x_n \in G$ $\forall n \geq n_0$.

Αποδ: i) $\Rightarrow$ ii) Εφόσον το G είναι ανοικτό και $x \in G$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq G$. Εφόσον $x_n \xrightarrow{\rho} x$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ άρα $x_n \in B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq G$ $\forall n \geq n_0$

ii) $\Rightarrow$ i) Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι το G δεν είναι ανοικτό. Τότε υπάρχει $x \in G$ ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$, να έχουμε $B_\rho(x,\varepsilon) \not\subseteq G$
$\Leftrightarrow B_\rho(x,\varepsilon) \cap (X \setminus G) \neq \emptyset$
Έστω για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $B_\rho\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap (X \setminus G) \neq \emptyset$

άρα υπάρχει $x_n \in B_\rho\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap (X \setminus G)$ δηλ.

$\rho(x_n, x) < \frac{1}{n}$ και $x_n \notin G$. Τότε $\rho(x_n, x) \to 0$

άρα: $x_n \xrightarrow{\rho} x$ ενώ $x_n \notin G$ $\forall n$, <u>άτοπο</u>

Επομένως το G είναι ανοικτό.

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $F\subseteq X$.
Τ.Α.Ε.Ι. i) Το F είναι κλειστό
ii) Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο F και $x\in X$ αν $x_n \xrightarrow{\rho} x$ τότε $x\in F$.

Αποδ. i) $\Rightarrow$ ii) Υποθέτουμε ότι το F είναι κλειστό.
Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο F και $x\in X$ ώστε: $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Θα δ.ο. $x\in F$.
Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι $x\notin F$.
Τότε: $x\in X\setminus F$. Εφόσον το $X\setminus F$ είναι ανοικτό από την προηγούμενη πρόταση $\exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $x_n\in X\setminus F$ $\forall n\geq n_0$ άτοπο διότι $x_n\in F$ $\forall n\geq n_0$
Επομένως: $x\in F$

ii) $\Rightarrow$ i) Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι ισχύει το ii) αλλά το F δεν είναι κλειστό. Τότε το $X\setminus F$ δεν είναι ανοικτό. Άρα υπάρχει $x\in X\setminus F$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon)\not\subseteq X\setminus F$ $\forall \varepsilon>0$ ή ισοδύναμα $B_\rho(x,\varepsilon)\cap F\neq\emptyset$ $\forall\varepsilon>0$
Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $x_n\in B_\rho\left(x,\frac{1}{n}\right)\cap F$. Τότε

$x_n\in F$ $\forall n\in\mathbb{N}$ και $\rho(x_n,x)<\frac{1}{n}$ $\forall n$. Συνεπώς $x_n \xrightarrow{\rho} x$

Αυτό είναι άτοπο λόγω του ii). Επομένως, το F είναι κλειστό.

Ορισμός: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $A\subseteq X$. Ένα $x\in X$ λέγεται σημείο επαφής του A αν για κάθε $\varepsilon>0$ $B_\rho(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$

Το σύνολο των σημείων επαφής του συνόλου A καλείται κλειστή θήκη του A (ή κλειστότητα του A) και συμβολίζεται με $\bar{A}$ ή $cl(A)$ ή $cl_\rho(A)$

Έτσι : $\bar{A} = cl(A) = \{x \in X : B_\rho(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \ \forall \varepsilon > 0\}$

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μ.χ., $A \subseteq X$, $x \in X$. Το x είναι σημείο επαφής του A ($x \in \bar{A}$) αν και μόνο αν υπάρχει μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n \xrightarrow{\rho} x$

Απόδ: ($\Rightarrow$) Έστω ότι το x είναι σημείο επαφής του A. Τότε $\forall \varepsilon > 0$ $B_\rho(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Τότε ~~$\forall \varepsilon>0$~~ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (εφαρμόζοντας το παραπάνω για $\varepsilon = \frac{1}{n}$)

$B_\rho\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$ άρα υπάρχει $x_n \in B_\rho\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$

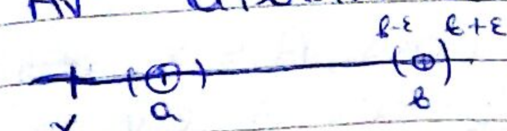
δηλ. $x_n \in A$ και $\rho(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Άρα $x_n \in A$ και

$x_n \xrightarrow{\rho} x$

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Θα δ.ο. το x είναι σημείο επαφής του A. Έστω $\varepsilon > 0$, εφόσον $x_n \xrightarrow{\rho} x$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ $\rho(x_{n_0}, x) < \varepsilon$. Τότε $x_{n_0} \in A$ και $x_{n_0} \in B_\rho(x,\varepsilon)$ άρα $A \cap B_\rho(x,\varepsilon) \neq \emptyset$

Παραδείγματα 1) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική.

Αν $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ $\overline{(a,b)} = [a,b]$

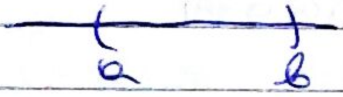


Μια ακολουθία που ανήκει στο (a,b): $a + \frac{b-a}{2n}$ και συγκλίνει στο a.

- αν $x < a$: για $\varepsilon = a - x > 0$ $B_\rho(x,\varepsilon) \cap (a,b) = \emptyset$
  άρα $x \notin \overline{(a,b)}$

• αν $x > b$ $\varepsilon = x - b > 0$ $B_\rho(x,\varepsilon) \cap (a,b) = \emptyset$ άρα $x \notin \overline{(a,b)}$

2) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική $\overline{(a,b)} = [a,b]$



$\overline{(a,b]} = [a,b]$, $\overline{[a,b)} = [a,b]$, $\overline{[a,b]} = [a,b]$

$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (διότι $\forall x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία ρητών q_n) με $q_n \to x$

$\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

3) Στο $\mathbb{R}^2$ με την ευκλείδεια μετρική $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ τότε $\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$

4) Αν (X,ρ) όπου ρ η διακριτή μετρική στο X τότε για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $\bar{A} = A$

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$

α) $A \subseteq \bar{A}$ και το $\bar{A}$ είναι κλειστό σύνολο

β) $\bar{A} = \cap\{F : \text{κλειστό } F \supseteq A\}$

γ) $A = \bar{A} \Leftrightarrow A$: κλειστό

δ) Αν $A \subseteq B$ τότε: $\bar{A} \subseteq \bar{B}$

ε) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

στ) $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$ (και δεν ισχύει ισότητα)

Απόδ: α) Αν $x \in A$ τότε για κάθε $\varepsilon > 0$. $x \in A \cap B_\rho(x,\varepsilon)$ άρα: $A \cap B_\rho(x,\varepsilon) \neq \emptyset$, άρα $x \in \bar{A}$. Δείχνουμε τώρα ότι το $\bar{A}$ είναι κλειστό

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολ. στο $\bar{A}$ και $x \in X$ με $x_n \xrightarrow{\rho} x$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ εφόσον $x_n \in \bar{A}$ υπάρχει $a_n \in A$ με $\rho(a_n, x_n) < \frac{1}{n}$

Τότε $0 \leq \rho(a_n, x) < \rho(a_n, x_n) + \rho(x_n, x) < \frac{1}{n} + \rho(x_n, x) \to 0$

Έτσι $a_n \xrightarrow{\rho} x$ με $a_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Επομένως $x \in \bar{A}$

Άρα το $\bar{A}$ είναι κλειστό

β) Εφόσον το $\bar{A}$ είναι κλειστό με $\bar{A} \supseteq A$ προκύπτει ότι $\bigcap\{F : F \text{ κλειστό } F \supseteq A\} \subseteq \bar{A}$

Αντίστροφα, έστω $x \in \bar{A}$ τότε υπάρχει μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του A με $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

Έστω F: κλειστό με $F \supseteq A$, τότε $x_n \in F$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

και εφόσον $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και F: κλειστό προκύπτει ότι $x \in F$. Άρα $x \in \bigcap\{F : F \text{ κλειστό } F \supseteq A\}$ Έτσι:

$\bar{A} \subseteq \bigcap\{F\ F \text{ κλειστό } F \supseteq A\}$, επομένως $\bar{A} = \bigcap\{F : F \text{ κλειστό } F \supseteq A\}$

γ) $(\Rightarrow)$ Αν $A = \bar{A}$ τότε (εφόσον το $\bar{A}$ είναι κλειστό) το A είναι κλειστό

$(\Leftarrow)$ Αν A κλειστό τότε από το β) $\bar{A} \subseteq A$ συνεπώς $A = \bar{A}$

δ) Έστω $A \subseteq B$, εφόσον $B \subseteq \bar{B}$ προκύπτει $A \subseteq \bar{B}$, εφόσον το $\bar{B}$ είναι κλειστό προκύπτει $\bar{A} \subseteq \bar{B}$

ε) $\left.\begin{array}{l} A \subseteq A\cup B \\ B \subseteq A\cup B \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \bar{A} \subseteq \overline{A\cup B} \\ \bar{B} \subseteq \overline{A\cup B} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{A}\cup\bar{B} \subseteq \overline{A\cup B}$

Επίσης, $\left.\begin{array}{l} A \subseteq \bar{A} \\ B \subseteq \bar{B} \end{array}\right\} \Rightarrow A\cup B \subseteq \bar{A}\cup\bar{B}$ με το σύνολο $\bar{A}\cup\bar{B}$ να είναι κλειστό (ως ένωση δύο κλειστών συνόλων)

Συνεπώς $\overline{A\cup B} \subseteq \bar{A}\cup\bar{B}$, επομένως $\overline{A\cup B} = \bar{A}\cup\bar{B}$

στ) $\left.\begin{array}{l} A\cap B \subseteq A \Rightarrow \overline{A\cap B} \subseteq \bar{A} \\ A\cap B \subseteq B \Rightarrow \overline{A\cap B} \subseteq \bar{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{A\cap B} \subseteq \bar{A}\cap\bar{B}$

Παρατήρηση: Στον τελευταίο εγκλεισμό δεν ισχύει πάντα ισότητα. Στους πραγματικούς αριθμούς με τη συνήθη μετρική.

(Π.χ.) α) $\mathbb{Q}\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \bar{\emptyset} = \emptyset$, $\bar{\mathbb{Q}}\cap\overline{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})} = \mathbb{R}\cap\mathbb{R} = \mathbb{R}$

β) $A = (0,1)$, $B = (1,2)$

$\bar{A}\cap\bar{B} = [0,1]\cap[1,2] = \{1\}$

$\overline{A\cap B} = \bar{\emptyset} = \emptyset$